

Exercices sur les variations de suites
Notre Dame de La Merci

Exercice 1 :

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

$$v_n = n + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1$$

$$w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Exercice 2

Étudier le sens de variation des suites ci-dessous :

$$\text{a) } u_n = -\frac{2n}{3} + \frac{1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{b) } v_n = n^2 + 4n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{c) } \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{d) } u_n = -\frac{n}{4} + \frac{1}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{e) } v_n = n^2 - 4n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\text{f) } \begin{cases} u_0 = -10 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Exercice 3 :

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$$u_n = 2n^2 - 3 \text{ pour } n \geq 1$$

$$v_n = \frac{1}{5n} \text{ pour } n \geq 1$$

Exercice 4 :

Étudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$$u_n = \frac{3n}{5} + 1 \text{ pour } n \geq 1$$

$$v_n = \frac{n}{n+1} \text{ pour } n \geq 1$$

$$w_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

CORRIGE - Notre Dame de La Merci - Montpellier

Exercice 1 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1 \quad \rightarrow u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} - 1 - \frac{1}{n} = \frac{1 \times n}{(n+1) \times n} - \frac{1 \times (n+1)}{n \times (n+1)} = \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

$$v_n = n + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 1 \quad \rightarrow v_{n+1} = n+1 + \frac{1}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(n+1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(n + \frac{1}{n}\right) = \boxed{n} + 1 + \frac{1}{n+1} \boxed{-n} - \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{n}{n(n+1)} - \frac{(n+1)}{n(n+1)}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1)}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n(n+1) - 1}{n(n+1)}$$

Si $n \geq 1$ alors $n(n+1) - 1 > 1$

$v_{n+1} - v_n > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

$$w_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ pour } n \geq 1 \quad \rightarrow w_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{1}{3}$$

$0 < \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ donc la suite (w_n) est décroissante.

Exercice 2 Etudier le sens de variation des suites ci-dessous :

a) $u_n = -\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2n}{3} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{2(n+1)}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2n}{3} - \frac{1}{2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2n - 2 + 2n}{3} = -\frac{2}{3} : u_{n+1} - u_n < 0 \text{ donc la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}$$

b) $v_n = n^2 + 4n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\rightarrow v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^2 + 4(n+1)\right) - (n^2 + 4n) = (n+1)^2 + 4n + 4 - n^2 - 4n$

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2 + 4 = (n+1+n) \times (n+1-n) + 4 = (2n+1) \times 1 + 4 = 2n+5$$

$$2n+5 > 0 \Leftrightarrow 2n > -5 \Leftrightarrow n > -\frac{5}{2}, \text{ or } n > 0 \text{ donc la suite } (v_n) \text{ est croissante.}$$

c) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\rightarrow u_{n+1} - u_n = -n^2$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

d) $u_n = -\frac{n}{4} + \frac{1}{3}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\rightarrow u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{n+1}{4} + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{n}{4} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{n+1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{n}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-n-1+n}{4} = -\frac{1}{4}$

$u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

e) $v_n = n^2 - 4n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\rightarrow v_{n+1} - v_n = \left((n+1)^2 - 4(n+1)\right) - (n^2 - 4n) = (n+1)^2 - 4n - 4 - n^2 + 4n$

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 - n^2 - 4 = (n+1+n) \times (n+1-n) - 4 = (2n+1) \times 1 - 4 = 2n-3$$

$2n-3 > 0 \Leftrightarrow 2n > 3 \Leftrightarrow n > \frac{3}{2}$, donc la suite (v_n) est croissante à partir du rang $n=2$

f) $\begin{cases} u_0 = -10 \\ u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases} (n \in \mathbb{N}) \rightarrow u_{n+1} - u_n = n^2$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

Pour $n \geq 1$ $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)^2 - 3) - (2n^2 - 3) = 2(n+1)^2 - 3 - 2n^2 + 3 = 2[(n+1)^2 - n^2]$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1+n)(n+1-n) = 2(2n+1) \times 1 = 2(2n+1)$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

Pour $n \geq 1$ $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{5(n+1)}}{\frac{1}{5n}} = \frac{1}{5(n+1)} \times \frac{5n}{1} = \frac{5n}{5(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

Pour une suite (v_n) est à termes positifs : $n < n+1 \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

Exercice 4 : Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes :

$u_n = \frac{3n}{5} + 1$ pour $n \geq 1 \rightarrow u_{n+1} = \frac{3(n+1)}{5} + 1 = \frac{3n+3}{5} + 1$

$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{3n+3}{5} + 1\right) - \left(\frac{3n}{5} + 1\right) = \frac{3n+3}{5} + 1 - \frac{3n}{5} - 1 = \frac{3n+3}{5} - \frac{3n}{5} = \frac{3}{5}$

$u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

$v_n = \frac{n}{n+1}$ pour $n \geq 1 \rightarrow v_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{n+2}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n^2+2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

$v_{n+1} - v_n > 0$ donc la suite (v_n) est croissante.

2^{ème} METHODE : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} : \frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$ donc la suite (v_n) est croissante.

$w_n = \left(\frac{7}{9}\right)^n$ pour $n \geq 1 \rightarrow w_{n+1} = \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}$

$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}}{\left(\frac{7}{9}\right)^n} = \left(\frac{7}{9}\right)^{n+1-n} = \frac{7}{9} : 0 < \frac{w_{n+1}}{w_n} < 1$ donc la suite (w_n) est décroissante.