1ère ES 3 Notre Dame de La Merci Mardi 08 décembre 2015

Contrôle de Mathématiques

Exercice 1 :

Un dé est déséquilibré. On estime que :

- les probabilités d'apparition des faces 2, 3, 4, 5 sont égales ;
- celle de la face 6 est deux fois plus petite que chacune des précédentes ;
- la probabilité de la face 1 est 0,5.

Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

Exercice 2 :

Un joueur lance un dé parfait :

- si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €,
- si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 €,
- si le 6 sort, il perd 5 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance $E(X)$.

Exercice 3 :

Dans une urne on dispose de cinq boules indiscernables au toucher :

trois vertes numérotées de 1 à 3 et deux rouges numérotées 4 et 6.

Règle du jeu : La partie consiste à tirer successivement deux boules au hasard, en remettant la première boule dans l'urne pour le second tirage.

→Si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue.

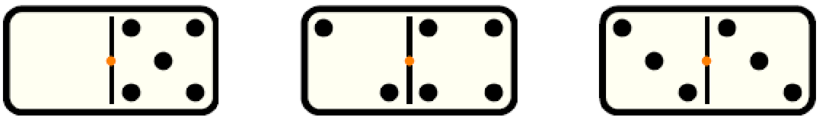
→Sinon, le joueur remporte le montant en euros égal au nombre formé en prenant le chiffre de la boule verte pour les dizaines et celui de la boule rouge pour les unités (ainsi le tirage vert 2 et rouge 4 remporte 24 €).

Soit X la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

a) Faire un tableau des possibles gains.
b) Donner la loi de probabilité de la variable X et son espérance.
c) On souhaite rendre le jeu équitable. Pour cela on fait payer la partie a €. Quelle valeur choisir pour a?

Exercice 4 :

Dans un jeu de domino, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.



1) Prouvez que le nombre de dominos est 28.
2) Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu (comportant bien sûr 28 dominos).
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir un double ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 ? (on rappelle que zéro est divisible par 3).
3) X est la variable aléatoire prenant la valeur -1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur n lorsqu'il obtient le double "*n et n*".
   a. Quelle est la loi de probabilité de X ?
   b. Calculez E(X).

1ère ES

CORRIGE - Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 1 : Un dé est déséquilibré. On estime que :

- les probabilités d'apparition des faces 2, 3, 4, 5 sont égales ;
- celle de la face 6 est deux fois plus petite que chacune des précédentes ;
- la probabilité de la face 1 est 0,5.

Donner la loi de probabilité définie sur l'ensemble des 6 faces.

→soit p la probabilité d'apparition de la face 2

La probabilité d'apparition de la face 6 est $\frac{p}{2}$.

La somme des probabilités est égale à 1 : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$

Soit : $0,5 + p + p + p + p + \frac{p}{2} = 1$

$$4,5p = 1 - 0,5$$

$$p = \frac{0,5}{4,5} = \frac{5}{45} = \frac{1}{9}$$

La loi de probabilités est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	0,5	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$

Vérification : $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{9}{18} + \frac{2}{18} + \frac{2}{18} + \frac{2}{18} + \frac{2}{18} + \frac{1}{18} = \frac{18}{18}$

Exercice 2 : Un joueur lance un dé parfait :

- si le numéro sorti est 2 ou 4, il gagne 1,5 €,
- si le numéro sorti est impair il gagne 0,5 €,
- si le 6 sort, il perd 5 €.

On appelle *X* la variable aléatoire qui à un numéro associe le gain algébrique en euros.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire *X* et calculer l'espérance E(*X*).

→X peut prendre les valeurs -5 ; 0,5 ; 1,5 €. Le dé est équilibré, toutes les faces ont la même probabilité.

Loi de probabilité de la variable aléatoire *X* :

x_i	-5	0,5	1,5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$

Espérance : $E(X) = -5 \times \frac{1}{6} + 0,5 \times \frac{3}{6} + 1,5 \times \frac{2}{6} = -\frac{5}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} + \frac{3}{2} \times \frac{2}{6} = -\frac{10}{12} + \frac{3}{12} + \frac{6}{12} = -\frac{1}{12}$

Exercice 3 : Dans une urne on dispose de cinq boules indiscernables au toucher :
trois vertes numérotées de 1 à 3 et deux rouges numérotées 4 et 6.

Règle du jeu : La partie consiste à tirer successivement deux boules au hasard, en remettant la première boule dans l'urne pour le second tirage.

→si les deux boules tirées sont de même couleur, la partie est perdue.

→sinon, le joueur remporte le montant en euros égal au nombre formé en prenant le chiffre de la boule verte pour les dizaines et celui de la boule rouge pour les unités (ainsi le tirage vert 2 et rouge 4 remporte 24 €).

Soit *X* la variable aléatoire représentant le gain du joueur.

a) Faire un tableau des possibles gains.
b) Donner la loi de probabilité de la variable *X* et son espérance.
c) On souhaite rendre le jeu équitable. Pour cela on fait payer la partie *a* €. Quelle valeur choisir pour *a*?

Tableau des possibles gains :

	1	**2**	**3**	**4**	**6**
1	0	0	0	14	16
2	0	0	0	24	26
3	0	0	0	34	36
4	14	24	34	0	0
6	16	26	36	0	0

→X peut prendre les valeurs 0 ; 14 ; 16 ; 24 ; 26 ; 34 ; 36 €.

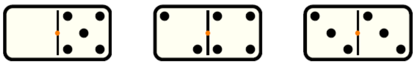
Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	0	14	16	24	26	34	36
$p\left(\mathrm{X}=x_i\right)$	$\frac{13}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{25}$

Espérance : $E\left(X\right)=0\times\frac{13}{25}+14\times\frac{2}{25}+16\times\frac{2}{25}+24\times\frac{2}{25}+26\times\frac{2}{25}+34\times\frac{2}{25}+36\times\frac{2}{25}$

$$E\left(X\right)=\frac{28}{25}+\frac{32}{25}+\frac{48}{25}+\frac{52}{25}+\frac{68}{25}+\frac{72}{25}=\frac{300}{25}=12\,€$$

Il faut faire payer la partie 12 € pour rendre le jeu équitable.



Exercice 4 :

Dans un jeu de domino, chaque domino est partagé en deux parties, chacune portant un numéro de 0 à 6 représenté par des points. Un double est un domino dont les deux parties portent le même numéro.

1) Chaque domino est unique

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	**0-0**	**0-1**	**0-2**	**0-3**	**0-4**	**0-5**	**0-6**
1	1-0	**1-1**	**1-2**	**1-3**	**1-4**	**1-5**	**1-6**
2	2-0	2-1	**2-2**	**2-3**	**2-4**	**2-5**	**2-6**
3	3-0	3-1	3-2	**3-3**	**3-4**	**3-5**	**3-6**
4	4-0	4-1	4-2	4-3	**4-4**	**4-5**	**4-6**
5	5-0	5-1	5-2	5-3	5-4	**5-5**	**5-6**
6	6-0	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	**6-6**

→ce qui fait 28 dominos, en excluant les dominos représentés deux fois dans le tableau.

2) Un joueur tire au hasard un domino d'un jeu (comportant bien sûr 28 dominos).

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un double ? → $\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 ? (on rappelle que zéro est divisible par 3). → **en bleu dans le tableau**

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1-0	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	2-0	2-1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	3-0	3-1	3-2	**6**	**7**	**8**	**9**
4	4-0	4-1	4-2	4-3	**8**	**9**	**10**
5	5-0	5-1	5-2	5-3	5-4	**10**	**11**
6	6-0	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	**12**

la probabilité d'avoir un domino dont la somme des deux numéros soit divisible par 3 est $\frac{10}{28}$.

3) X est la variable aléatoire prenant la valeur -1 lorsque le joueur obtient un domino non double, et la valeur *n* lorsqu'il obtient le double "*n et n*".

a. Quelle est la loi de probabilité de X ?

→X peut prendre les valeurs -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 6 €.

Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

x_i	-1	0	1	2	3	4	5	6
$p(\mathrm{X}=x_i)$	$\frac{21}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$

b. Calculez $E(X)$.

$$E(X)=-1\times\frac{21}{28}+0\times\frac{1}{28}+1\times\frac{1}{28}+2\times\frac{1}{28}+3\times\frac{1}{28}+4\times\frac{1}{28}+5\times\frac{1}{28}+6\times\frac{1}{28}$$

$$E(X)=-\frac{21}{28}+\frac{1}{28}+\frac{2}{28}+\frac{3}{28}+\frac{4}{28}+\frac{5}{28}+\frac{6}{28}$$

$$E(X)=0$$