

Contrôle de Mathématiques

*Je sais bien que le plus petit élan d'amour vrai nous rapproche beaucoup plus de Dieu
que toute la science que nous pouvons avoir de la création et de ses degrés.*

Antonin Artaud

Exercice 1 :

(6 pts)

Donner les racines, la forme factorisée, le tableau de signes puis le tableau de variations des polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 + 5x - 36$$

$$Q(x) = -3x^2 - 6x + 24$$

Exercice 2 :

(4 pts)

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $\frac{-3x^2 + 5x + 8}{6 - 2x} \geq 0$.

Exercice 3 :

(3 pts)

Trouver deux entiers consécutifs (qui se suivent) dont le produit est égal à 4 970.

Exercice 4 : Optimisation de bénéfice

(10 pts)

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de x **milliers** d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

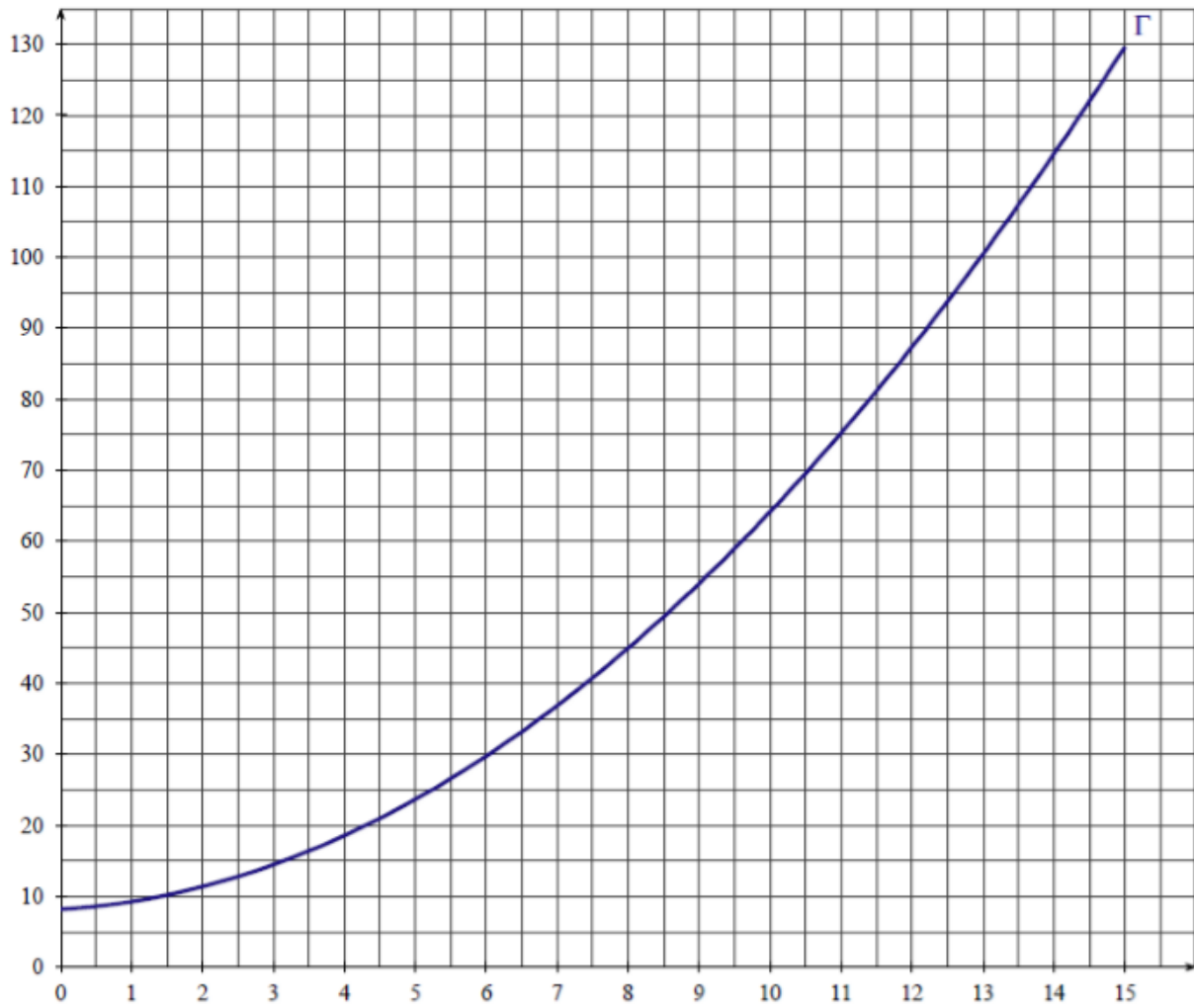
$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?
2. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x) = 8x$.
 - a) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.
 - b) Par lecture graphique déterminer :
 - l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif ;
 - la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
3. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.
 - a) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.
 - b) Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).
 - c) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.

NOM :

ANNEXE : CORRIGE – Notre Dame de La Merci



Exercice 1 : Racines, forme factorisée, tableau de signes, tableau de variations de polynôme : (6 pts)

$$P(x) = x^2 + 5x - 36$$

$$\text{Discriminant : } \Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-36) = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

$$\text{Deux racines : } x_1 = \frac{-5-13}{2 \times 1} = \frac{-18}{2} = -9 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+13}{2 \times 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Forme factorisée : } P(x) = (x - (-9)) \times (x - 4) = (x + 9)(x - 4)$$

$a = 1$ donc $a > 0$ donc le polynôme est orienté « vers le haut »

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

$$x^2 + 5x - 36 \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in]-\infty; -9] \cup [4; +\infty[$$

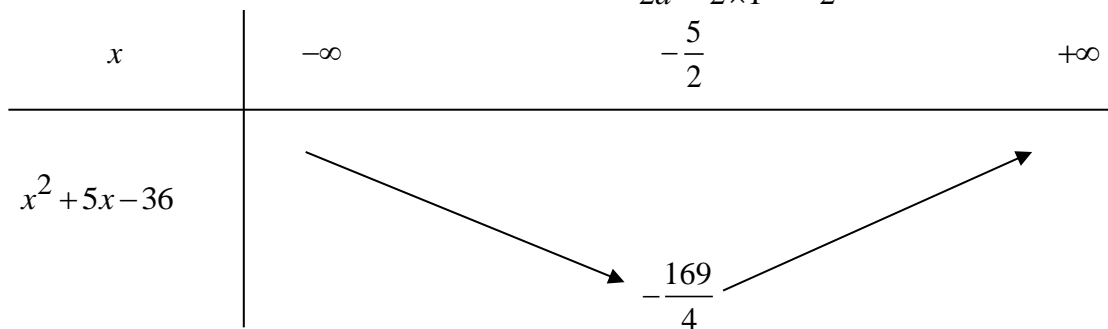
$$x^2 + 5x - 36 \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in [-9; 4]$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-9	4	$+\infty$
$x^2 + 5x - 36$	+	0	-	+

$a = 1$ donc $a > 0$ donc le polynôme est orienté « vers le haut »

→ le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2 \times 1} = -\frac{5}{2}$



$$P\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \times \left(-\frac{5}{2}\right) - 36 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} - 36 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} - \frac{144}{4} = -\frac{169}{4}$$

$$Q(x) = -3x^2 - 6x + 24$$

$$\text{Discriminant : } \Delta = (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 24 = 36 + 288 = 324 = 18^2$$

$$\text{Deux racines : } x_1 = \frac{-(-6)-18}{2 \times (-3)} = \frac{-12}{-6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-6)+18}{2 \times (-3)} = \frac{24}{-6} = -4$$

$$\text{Forme factorisée : } Q(x) = -3(x - 2) \times (x - (-4)) = -3(x - 2)(x + 4)$$

$a = -3$ donc $a < 0$ donc le polynôme est orienté « vers le bas »

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

$$-3x^2 - 6x + 24 \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in [-4; 2]$$

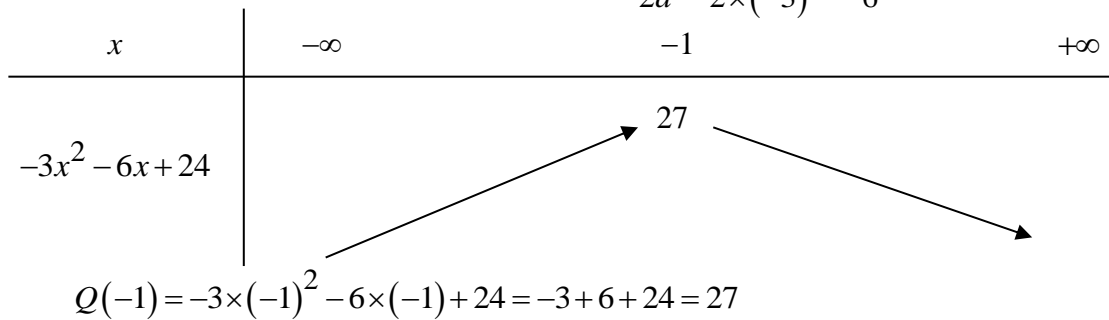
$$-3x^2 - 6x + 24 \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in]-\infty; -4] \cup [2; +\infty[$$

Tableau de signes :

x	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$-3x^2 - 6x + 24$	-	0	+	-

$a = -3$ donc $a < 0$ donc le polynôme est orienté « vers le bas »

→ le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \times (-3)} = \frac{6}{-6} = -1$



Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $\frac{-3x^2 + 5x + 8}{6 - 2x} \geq 0$. (4 pts)

Etude du numérateur :

Discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times (-3) \times 8 = 25 + 96 = 121 = 11^2$

Deux racines : $x_1 = \frac{-5 - 11}{2 \times (-3)} = \frac{-16}{-6} = \frac{8}{3} \approx 2,67$

$x_2 = \frac{-5 + 11}{2 \times (-3)} = \frac{6}{-6} = -1$

$a = -3$ donc $a < 0$ donc le polynôme est orienté « vers le bas »

Le polynôme est du signe de a à l'extérieur des racines :

$-3x^2 + 5x + 8 \geq 0$ si $x \in \left[-1; \frac{8}{3}\right]$

$-3x^2 + 5x + 8 \leq 0$ si $x \in]-\infty; -1] \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right[$

Etude du dénominateur : $6 - 2x > 0$

$\Leftrightarrow -2x > -6$

$\Leftrightarrow x < \frac{-6}{-2}$

$\Leftrightarrow x < 3$

Tableau de signes : La valeur interdite est $x = 3$

x	$-\infty$	-1	$\frac{8}{3}$	3	$+\infty$	
$-3x^2 + 5x + 8$	-	0	+	0	-	-
$6 - 2x$	+	+	+	0	-	-
$\frac{-3x^2 + 5x + 8}{6 - 2x}$	-	0	+	0	-	+

$\frac{-3x^2 + 5x + 8}{6 - 2x} \geq 0$ si $x \in \left[-1; \frac{8}{3}\right] \cup]3; +\infty[$

Exercice 3 : Trouver deux entiers consécutifs (qui se suivent) dont le produit est égal à 4 970 (3 pts)

Soit x le plus petit de ces deux entiers : le suivant est $x + 1$. Ainsi :

$x(x + 1) = 4970$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 4970 = 0$$

$$\text{Discriminant : } \Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-4970) = 1 + 19\,880 = 19\,881 = 141^2$$

$$\text{Deux racines : } x_1 = \frac{-1-141}{2 \times 1} = \frac{-142}{2} = -71 \text{ et } x_2 = \frac{-1+141}{2 \times 1} = \frac{140}{2} = 70$$

Les solutions sont -71 et -70 ou 70 et 71 .

Exercice 4 : Optimisation de bénéfice

(10 pts)

Une entreprise fabrique un produit « Champion ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles.

Le **coût total**, exprimé en **milliers** d'euros, de fabrication de x **milliers** d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

On admet que chaque millier d'articles fabriqués est vendu au prix de 8 €.

4. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?

$$\rightarrow \text{Pour 4 000 articles : } 4 \times 8 - C(4) = 32 - (0,5 \times 4^2 + 0,6 \times 4 + 8,16) = 13,44 \text{ €}$$

$$\rightarrow \text{Pour 12 000 articles : } 12 \times 8 - C(12) = 96 - (0,5 \times 12^2 + 0,6 \times 12 + 8,16) = 8,64 \text{ €}$$

5. On désigne par $R(x)$ le montant en **milliers** d'euros de la **recette mensuelle** obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit «Champion». On a donc $R(x) = 8x$.

- c) Tracer dans le repère donné en annexe la courbe D représentative de la fonction recette.

→ droite tracée en rouge

- d) Par lecture graphique déterminer :

L'entreprise réalise un bénéfice positif si la production x est environ comprise entre 1,2 et 13,6 soit environ entre 1200 et 13600 articles.

Le bénéfice semble maximal pour une production x_0 environ égale à 7,3 soit environ 7300 articles.

6. On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.

- d) Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8x - (0,5x^2 + 0,6x + 8,16) = 8x - 0,5x^2 - 0,6x - 8,16 = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$$

- e) Signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

$$\text{Discriminant : } \Delta = 7,4^2 - 4 \times (-0,5) \times (-8,16) = 38,44 = 6,2^2$$

$$\text{Deux racines : } x_1 = \frac{-7,4-6,2}{2 \times (-0,5)} = \frac{-13,6}{-1} = 13,6 \text{ et } x_2 = \frac{-7,4+6,2}{2 \times (-0,5)} = \frac{-1,2}{-1} = 1,2$$

Le bénéfice est positif si $x \in]1,2;13,6[$ soit une prod. comprise entre 1200 et 13600 articles

- f) Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$.

→ $a = -0,5$ donc $a < 0$ donc le polynôme associé à la fonction B est orienté « vers le bas »

$$\text{Son sommet est donné par } \frac{-b}{2a} = \frac{-7,4}{2 \times (-0,5)} = \frac{-7,4}{-1} = 7,4$$

Ainsi la fonction B est croissante si $x \in]0;7,4]$ et décroissante si $x \in]7,4;15]$.

Le **bénéfice est maximal** pour 7400 articles fabriqués et vendus chaque mois.

Ce **bénéfice maximal** est donné par $B(7,4) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16 = 19,22$ soit 19 220 €.

ANNEXE : CORRIGE – Notre Dame de La Merci

