Fonctions et dérivation

I. La fonction racine carrée

1. Définition

La fonction « racine carrée » est la fonction *f* qui, à tout nombre réel positif *x*, associe sa racine carrée $\sqrt{x}$.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = [0;+\infty[$

Exemples : $f(2)=\sqrt{2}$ $\quad$ $f(4)=2$ $\quad$ $f(-5)$ est impossible

2. Théorème

La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0;+\infty[$.

Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

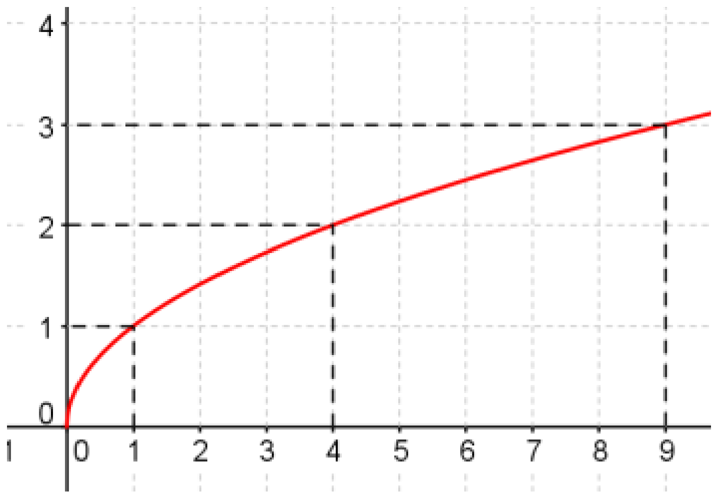
Le minimum de la fonction racine carrée est 0 c'est-à-dire que pour tout *x*, $\sqrt{x} \geq 0$

3. Représentation graphique

Tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	6	9
$f(x)=\sqrt{x}$	0	1	$\approx 1,41$	$\approx 1,72$	2	$\approx 2,23$	$\approx 2,45$	3

Représentation graphique :



II. La fonction cube

1. Définition

La fonction « cube » est la fonction *f* qui, à tout nombre réel positif *x*, associe son cube x^3.

L'ensemble de définition de f est : $D_f = \mathbb{R}$

Exemples : $f(2)=8$ $\quad$ $f(4)=64$ $\quad$ $f(-5)=-125$

2. Théorème

La fonction cube est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $x \geq 0$ alors $x^3 \geq 0$

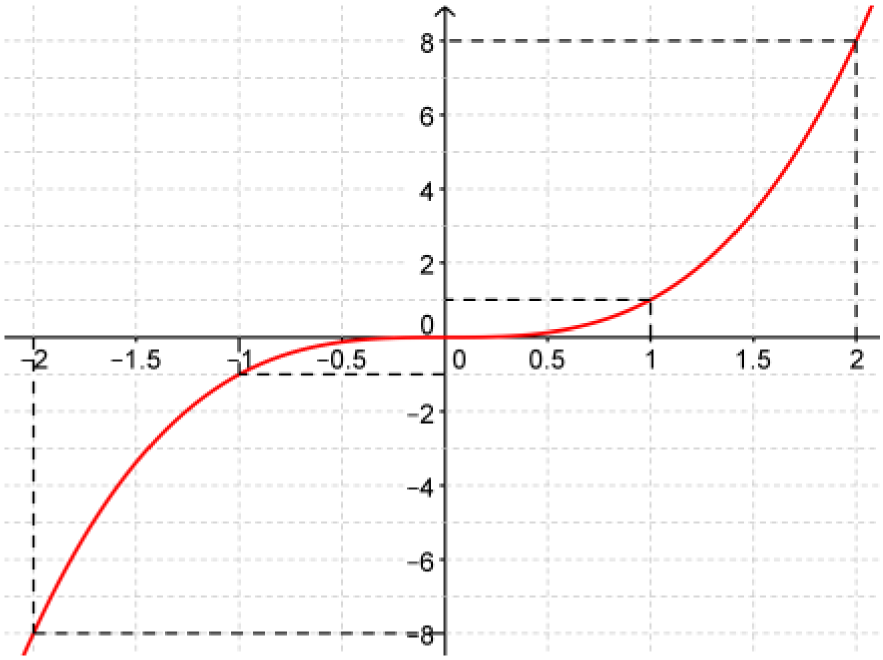
Si $x \leq 0$ alors $x^3 \leq 0$

3. Représentation graphique

Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=\sqrt{x}$	-27	-8	-1	0	1	8	27

Représentation graphique :



III Taux de variation.

♦ **Définition :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si a et b sont deux réels (points) de I, avec a ≠ b, le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ s'appelle « le taux de variation de la fonction f entre les réels a et b »

En posant b = a + h avec h ≠ 0, ce quotient s'écrit : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

♦ **Interprétation géométrique :**

Soit A un point de la courbe d'abscisse a : $A(a;f(a))$

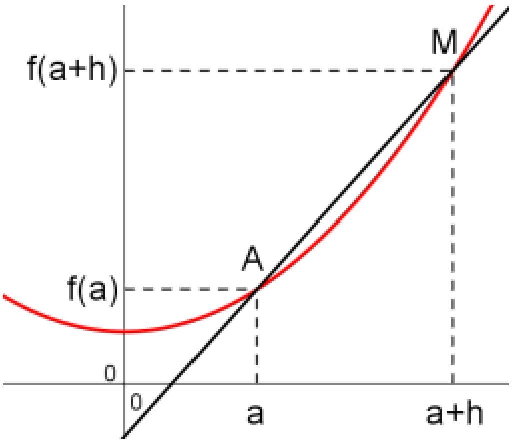
et M un point distinct de A, d'abscisse a + h : $M(a+h;f(a+h))$

Le coefficient directeur de la droite (AM) est donné par : $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Propriété :

Soit A un point de coordonnées $(a;f(a))$ et M un point distinct de A, de coordonnées $(a+h;f(a+h))$.

Le taux de variation de f entre A et M est égal au coefficient directeur de la droite (AM).



NB : Toutes les droites admettent un coefficient directeur, sauf les droites verticales.

IV Fonction dérivable en un point, nombre dérivé

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I.
Dire que « f est dérivable en a » signifie que lorsque h tend vers 0, le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel fini.
(On dit que « le taux de variation admet une limite finie lorsque h tend vers 0 »).
Ce nombre réel noté f'(a) s'appelle « le nombre dérivé de la fonction f en a » et on note :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemple 1:

Soit f : $x \mapsto x^2$, nous allons montrer que f est « dérivable en 3 ».

- **Calculons le taux de variation de f entre 3 et 3 + h.**

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{3^2+2\times3\times h+h^2-3^2}{h} = \frac{6h+h^2}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$$

- **Cherchons la limite de ce taux de variation lorsque h tend vers 0**

  Lorsque l'on donne à h des valeurs proches de 0, **6 + h prend des valeurs proches de 6**

  On écrit : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to0} 6+h = 6$

On dit que f est dérivable en 3 et que son nombre dérivé en 3, noté f'(3) est 6 : f'(3) = 6

Exemple 2 :

On donne la fonction f : $x \mapsto \sqrt{x}$.

Montrez que f est dérivable en 2 et donnez son nombre dérivé en 2 , f'(2).

- **Calculons le taux de variation de f entre 2 et 2 + h.**

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\frac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(\sqrt{2+h}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}=\frac{2+h-2}{h\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$$

soit : $$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$$

- **Cherchons la limite de ce taux de variation lorsque h tend vers 0**

  Lorsque l'on donne à h des valeurs proches de 0, **2 + h prend des valeurs proches de 2.**

  On écrit : $$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

On dit que f est dérivable en 2 et que son nombre dérivé en 2, noté f'(2) est $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **:** $f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

V Interprétation géométrique de la dérivabilité d'une fonction en un point – Tangente

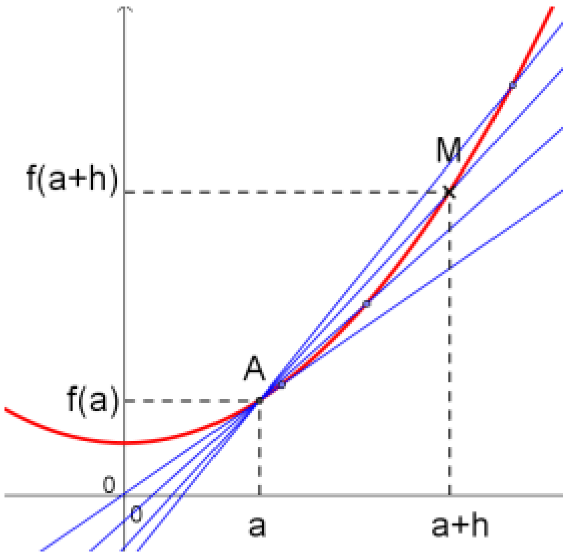
On considère la courbe représentative d'une fonction f dans un repère, **f étant dérivable en un point A d'abscisse a.**

Les coordonnées du point A sont donc :

A(a ; f(a)).

Sur cette courbe, on considère les points **A(a ; f(a))** et **M(a + h ; f(a + h))** (h ≠ 0) (M est différent de A).

Le <u>taux de variation</u> de la courbe entre le point A et le point M est :



$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si M est pris infiniment proche de A, mais différent de A, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=f'(a)$$ puisque la fonction f est dérivable en a

Lorsque h tend vers 0, alors a + h tend vers a et graphiquement et le point M se rapproche tout près du point A (tout en étant distinct du point A).

→la droite (AM) finit par coïncider avec une droite T_A que l'on appelle **la tangente en A à la courbe C_f**

Le **coefficient directeur de la tangente T_A est f'(a)** car $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

« f est dérivable en a » signifie que toutes les droites (AM) finissent par coïncider avec une droite (non parallèle avec l'axe des ordonnées) lorsque h tend vers 0 : cette droite s'appelle **la tangente au point d'abscisse a à la courbe** »