

Exercices sur les variables aléatoires

Exercice 1 :

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

On marque 10 points si on a tiré l'as de coeur, 5 points si on a tiré un autre as, 3 points si on a tiré une figure (Valet, Dame ou Roi) et zéro point dans tous les autres cas.

On définit une variable aléatoire X dont la valeur est le nombre de points obtenus.

- 1) Donner la loi de probabilité de X .
- 2) Calculer l'espérance de ce jeu.

Exercice 2 :

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On appelle X la variable aléatoire égale au chiffre obtenu. La loi de probabilité de X est précisée dans le tableau suivant, dans lequel a est un nombre.

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$	$7a$

- 1) Calculer a .
- 2) Le dé est-il truqué.

Exercice 3 :

Ali Baba lance deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il appelle S la somme des résultats des deux lancers.

La porte du paradis ne s'ouvrira que si S est un nombre divisible par 6.

Quelle est la probabilité que la porte s'ouvre ?

Exercice 4 :

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés cubiques.

On appelle M la variable aléatoire égale au maximum des résultats des deux dés.

A l'aide d'un tableau à double entrées, déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire M .

- 1) Donner la loi de probabilité de M .
- 2) Calculer l'espérance de M .

Exercice 5 :

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public : dans une urne sont placées :

- 2 boules rouges R_1 et R_2
- 2 boules vertes V_1 et V_2
- 1 boule blanche B

Ces boules sont indiscernables au toucher.

Le joueur prend une première boule au hasard, puis sans la remettre dans l'urne, il tire une seconde boule.

A la fin de la partie, si la boule blanche a été tirée, le joueur gagne 10 € ; il perd dans les autres cas.

Pour faire une partie, le joueur doit payer 5 €.

On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie, c'est-à-dire la différence entre le gain éventuel et le prix du jeu.

- 1) Déterminer avec un arbre tous les cas possibles.
- 2) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
- 3) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- 4) Quelle est l'espérance de ce jeu ?

CORRIGE – La Merci – Montpellier – M. QUET

Exercice 1 :

1) Les tirages se font « au hasard », on fait donc l'hypothèse d'équiprobabilité, par conséquent, chaque carte a la même probabilité $\frac{1}{32}$ d'être tirée. On a donc :

$$p(X = 10) = p(\text{as de coeur}) = \frac{1}{32}$$

$$p(X = 5) = p(\text{as de carreau, as de pique, as de trèfle}) = \frac{3}{32}$$

$$p(X = 3) = p(\text{roi, dame ou valet}) = \frac{12}{32} \quad \rightarrow 3 \text{ figures dans chacune des quatre « couleurs »}$$

$$p(X = 0) = p(\text{dix, neuf, huit ou sept}) = \frac{16}{32}$$

On peut définir la loi de probabilité de X :

x_i	0	3	5	10
$p(X = x_i)$	$\frac{16}{32}$	$\frac{12}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On vérifie que la somme des probabilités $p(X = x_i)$ vaut 1 :

$$\frac{16}{32} + \frac{12}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{32}{32} = 1$$

2) L'espérance est :

$$E(X) = 0 \times \frac{16}{32} + 3 \times \frac{12}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 10 \times \frac{1}{32} = \frac{36}{32} + \frac{15}{32} + \frac{10}{32} = \frac{61}{32}$$

Exercice 2 :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(X = x_i)$	a	2a	3a	4a	5a	7a

1) La somme des probabilités doit être égale à 1 donc :

$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 7a = 1$$

$$\Leftrightarrow 21a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{21}$$

2) Les faces ont toutes des probabilités différentes d'apparaître : le dé est truqué.

Exercice 3 :

Ici un tableau à deux entrées est nécessaire pour lister toutes les combinaisons possibles :

→ en première ligne, les résultats possibles du dé 1

→ en première colonne, les résultats possibles du dé 2

Le tableau comptabilise la somme des deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On s'intéresse aux résultats multiples de 6 : soit 6 et 12 → il y en a 6 sur 36.

Probabilité que la porte s'ouvre en utilisant les variables aléatoires :

Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient un multiple de 6 et qui vaut 0 dans le cas contraire.

On peut définir la loi de probabilité de X :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

La probabilité cherchée est l'espérance de X :

$$E(X) = 0 \times \frac{5}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Il a une chance sur 6.

Exercice 4 :

Voici le tableau à double entrées demandées :

→ en première ligne, les résultats possibles du dé 1

→ en première colonne, les résultats possibles du dé 2

Le tableau indique le plus grand des deux dés.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

La variable aléatoire M peut prendre les valeurs : 1, 2, 3, 4, 5, 6

Voici la loi de probabilité de M :

x_i	1	2	3	4	5	6
$p(M = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

On vérifie que $\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{7}{36} + \frac{9}{36} + \frac{11}{36} = \frac{36}{36} = 1$

2) L'espérance est :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{1}{36} + \frac{6}{36} + \frac{15}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{66}{36} = \frac{161}{36} \approx 4,5$$

Exercice 5 :

Au cours d'une fête, le jeu suivant est proposé au public : dans une urne sont placées :

- 2 boules rouges R1 et R2
- 2 boules vertes V1 et V2
- 1 boule blanche B

Ces boules sont indiscernables au toucher.

Le joueur prend une première boule au hasard, puis sans la remettre dans l'urne, il tire une seconde boule.

A la fin de la partie, si la boule blanche a été tirée, le joueur gagne 10 € ; il perd dans les autres cas.

Pour faire une partie, le joueur doit payer 5 €.

On désigne par X la variable aléatoire associée au gain algébrique du joueur à l'issue d'une partie, c'est-à-dire la différence entre le gain éventuel et le prix du jeu.

- 1) Arbre représentant tous les cas possibles...
- 2) En tenant compte de la mise de 5€, les valeurs prises par la variable aléatoire X sont 5 et -5.
- 3) La loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x_i	-5	5
$p(\mathbf{X} = x_i)$	$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

4) Espérance de ce jeu :

$$E(\mathbf{X}) = -5 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{2}{5} = -3 + 2 = -1$$

En moyenne, on perd un euro par partie.